

Matière :

Destinataires :

EXERCICE MATHS

Sujet : MATHEMATIQUES GENERALES (TS1, TS2 et TL)
Exercice et problèmes corrigés

Auteur :

Date de publication :

Sources :

SOMMAIRE

- 1 EPREUVE :..... 2**
- 1.1 EXERCICE 1 :(PROBLEME DU BANQUIER) 2
- 1.2 PROBLEME : 2

- 2 CORRIGE 3**
- 2.1 EXERCICE 1 : 3
- 2.2 PROBLEME : 4

1 EPREUVE :

1.1 EXERCICE 1 : (Problème du banquier)

- 1- Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0.

Nous admettrons par la suite que lorsque x est proche de 0, la courbe (C) est suffisamment proche de sa tangente (T) pour prendre x comme approximation de $\ln(1+x)$.

- 2- Un banquier en veine de confiance affirme : « pour estimer le nombre d'année qu'il faut à un capital placé à intérêts composés pour doubler, il suffit de diviser 70 par le taux d'intérêts ». Nous allons justifier cette pratique.

- a- Montrer que le nombre d'années, n , nécessaires au doublement d'un capital placé à t % d'intérêt composés vérifie :

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}.$$

- b- On pose $N = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$. En considérant que $\frac{t}{100}$ est proche de 0, donner

en utilisant 1-, une approximation de $\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

- c- En déduire que $N \times t \approx 70$.

- d- Application numérique : Calculer d'abord avec la formule du a- puis avec la méthode du banquier, le nombre d'années nécessaires au doublement d'un capital placé à 8 %.

1.2 PROBLEME :

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+1) + 2x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

- 1- a- Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et en déduire une asymptote à (C_g).
- b- Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- 2- Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
- 3- Tracer (C_g) et son asymptote.
- 4- a- Montrer que la fonction G , définie sur $] -1; +\infty[$ par $G(x) = x \ln(x+1) + \ln(x+1) - x + x^2$, est une primitive de g .
- b- Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 g(x) dx$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = x(e^{x^2} - 1)$. et (C_f) sa courbe représentative, sur l'intervalle $[-2; 2]$, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1- a- Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = e^{x^2} - 1 + 2x^2 e^{x^2}$. Quel est le signe de $e^{x^2} - 1$? En déduire que pour réel x , $f'(x)$ est positif ou nul.

b- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} et tracer (C_f) .

2- Soit I_2 l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$; montrer que $I_2 = \frac{e}{2} - 1$.

Partie C

On admettra que, sur $[0; 1]$, la fonction f est positive et $f \leq g$.

Soit \mathcal{A} la surface délimitée, sur le graphique, par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer la valeur exacte de l'aire de \mathcal{A} , exprimée en cm^2 , puis sa valeur approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

2 CORRIGE

2.1 EXERCICE 1 :

1- $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ d'où :

$$(T) : y = x$$

2- a- Soit C_n le capital après n années de placement, on a :

$$C_n = C_{n-1} + \frac{t}{100} C_{n-1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) C_{n-1}$$

Donc (C_{n-1}) est une suite géométrique de raison $q = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et de premier terme C_0 ; ainsi :

$$C_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n C_0.$$

Par suite $C_n \geq 2C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 2$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

b- $\frac{t}{100} \approx 0$ donc d'après 1- $\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100}$.

c- Ainsi $N \approx \frac{\ln 2}{\frac{t}{100}}$ donc $N \times t \approx 100 \ln 2$ ou encore $N \times t \approx 70$

d- 1^{ère} méthode : $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1+0,08)}$; donc $n \geq 9,006$ d'où $n \approx 9$

2^{ème} méthode : $N \times 8 \approx 70$; donc $N \approx 8,75$ d'où $N \approx 9$

2.2 PROBLEME :

Partie A

1- a- $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Ainsi la droite d'équation $x = -1$ A.V à (C_g) .

3/4

b- $g'(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; or $x+1 > 0$ et $2x+3 > 0$ sur D_g donc $g'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

3- (C_g) et asymptote (voir à la fin).

4- a- $G'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} - 1 + 2x$
 $= \ln(x+1) + 2x$
 $= g(x)$ cqfd

b- $I_1 = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0)$; d'où $I_1 = 2\ln 2$

Partie B

1- a- $f(x) = e^{x^2} - 1 + 2x^2 e^{x^2}$

or $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$.

On a aussi $x^2 \geq 0$ et $e^{x^2} > 0$ donc $x^2 e^{x^2} \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Par suite $f(x) \geq 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	○	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Tracer de (C_f) voir suite.

$$2- I_2 = \int_0^1 x e^{x^2} dx - \int_0^1 x dx = \left[\frac{e^{x^2} - x}{2} \right]_0^1 = \frac{e - 1}{2} - \frac{1}{2}; \text{ d'où } I_2 = \frac{e}{2} - 1$$

Partie C

$$\mathcal{A} = 8 \text{cm}^2 \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = 8 \text{cm}^2 (I_1 - I_2) \text{ donc } \mathcal{A} = 8 \left(2 \ln 2 + 1 - \frac{e}{2} \right) \text{cm}^2$$

Et

$$\mathcal{A} \approx 8,16 \text{ cm}^2$$

